THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 6

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. (1) Pour l'ordre 180 :
- Factorisation de 180 :
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$
- Par le théorème de classification des groupes abéliens finis engendrés, tout groupe abélien G d'ordre 180 se décompose en une somme directe de groupes cycliques correspondant à ces puissances de nombres premiers.
  - Pour la partie 2 (ordre $2^2 = 4$), les groupes possibles sont $\mathbb{Z}_4$ ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
  - Pour la partie 3 (ordre $3^2 = 9$), les groupes possibles sont $\mathbb{Z}_9$ ou $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
  - Pour la partie 5 (ordre 5), la seule option est $\mathbb{Z}_5$.
- Ainsi, les classifications possibles pour G sont :
$$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5,$$
$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \quad \text{et} \quad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5.$$

(2) Pour l'ordre 72 :
- Factorisation de 72 :
$$72 = 2^3 \cdot 3^2.$$
- Les structures possibles pour la partie 2 (ordre $2^3 = 8$) sont :
  - $\mathbb{Z}_8$
  - $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
  - $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- Les structures possibles pour la partie 3 (ordre $3^2 = 9$) sont :
  - $\mathbb{Z}_9$
  - $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
- En combinant ces éléments, les classifications possibles pour G sont :
$$G \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9,$$
$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

(3) Pour l'ordre 200 :
- Factorisation de 200 :
$$200 = 2^3 \cdot 5^2.$$
- Les structures possibles pour la partie 2 (ordre $2^3 = 8$) sont :
  - $\mathbb{Z}_8$

  - — $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
  - — $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- — Les structures possibles pour la partie 5 (ordre $5^2 = 25$) sont :
  - — $\mathbb{Z}_{25}$
  - — $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$
- — En combinant ces éléments, les classifications possibles pour G sont :

$$G \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25},$$
$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5.$$

Exercise 3. (1) Nous avons $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Si A n'a pas d'élément d'ordre 4, alors A ne peut pas avoir de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, donc ce dernier ne peut pas apparaître dans la décomposition de A donnée par le théorème de classification des groupes abéliens finis. Ainsi, A doit être isomorphe à l'un des groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \text{ ou } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times Z/5\mathbb{Z} \times Z/5\mathbb{Z}$$

En particulier, A possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Par le théorème de classification des groupes abéliens finis, les groupes abéliens d'ordre p^5 sont, à isomorphisme près, les suivants :

$$\mathbb{Z}/p^5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$$

Ainsi, il existe exactement 7 de ces groupes. Chacun d'entre eux correspond à une partition de l'entier 5, c'est-à-dire le nombre de manières différentes d'écrire n comme une somme d'entiers positifs. Par le même théorème, nous pouvons vérifier que le nombre de groupes abéliens d'ordre p^n correspond au nombre de partitions de l'entier n.

Exercise 4. (1) Remarquons que comme chaque $\mathrm{Tors}(A_\alpha)$ est un sous-groupe de A_α, nous avons que

$$\bigoplus_{\alpha \in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha)$$

est un sous-groupe de $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ et par définition, il en est de même pour

$$\mathrm{Tors}(\bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha).$$

Nous allons montrer qu'ils sont les mêmes ensembles. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathrm{Tors}(\bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha)$. Il existe donc un entier $n > 0$ tel que $n(a_\alpha)_{\alpha \in I} = 0$. Ainsi, pour tout $\alpha \in I$, nous obtenons que $na_\alpha = 0$ et par conséquent $a_\alpha \in \mathrm{Tors}(A_\alpha)$. Par suite, $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha \in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha)$ et

$$\mathrm{Tors}(\bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha).$$

Réciproquement, si
$$(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} \mathrm{Tors}(A_\alpha),$$
alors pour chaque $\alpha \in I$, soit n_α le plus petit entier strictement positif tel que $n_\alpha a_\alpha = 0$. Comme tous les a_α sauf un nombre fini sont égaux à 0, il en résulte que tous les n_α sauf un nombre fini valent 1, et nous pouvons donc définir $n = \Pi_\alpha n_\alpha$. Puisque $n((a_\alpha)_{\alpha\in I}) = 0$, nous obtenons que $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathrm{Tors}(\bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha)$.

(2) La démonstration de la première inclusion pour les sommes directes reste valable dans le cas des produits directs.

Soit $A = \prod_{n>1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors $(1, 1, 1, ...) \in \prod_{n>1} \mathrm{Tors}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mais on vérifie que
$$(1, 1, 1, ...) \notin \mathrm{Tors}(\prod_{n>1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Exercise 5. Définissons l'homomorphisme $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}$ par
$$\phi(x) = \left(x \bmod p_1^{a_1}, x \bmod p_2^{a_2}, \ldots, x \bmod p_k^{a_k}\right),$$
qui associe à chaque entier x ses classes d'équivalence modulo $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_k^{a_k}$. D'après le premier théorème d'isomorphisme,
$$\mathbb{Z}/\ker(\phi) \cong \mathrm{im}(\phi).$$
Le noyau est constitué de tous les entiers x tels que
$$\phi(x) = (0, 0, \ldots, 0).$$
Cela signifie que $x \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$. Par conséquent, x doit être un multiple de $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, car c'est le plus petit entier divisible par chacun des $p_i^{a_i}$. Ainsi, $\ker(\phi) = d\mathbb{Z}$.

Pour montrer que ϕ est surjective, considérons un élément arbitraire $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ dans
$$\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}.$$
Nous devons trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que
$$x \equiv y_i \pmod{p_i^{a_i}} \quad \text{pour chaque } i = 1, 2, \ldots, k.$$
Pour chaque i, définissons
$$p_i' = \frac{d}{p_i^{a_i}} = p_1^{a_1} \ldots p_{i-1}^{a_{i-1}} p_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots p_k^{a_k},$$
qui est premier avec $p_i^{a_i}$. Par le lemme de Bézout, il existe un entier b_i tel que
$$p_i' b_i \equiv 1 \pmod{p_i^{a_i}}. \tag{1}$$
Définissons alors
$$x = y_1 p_1' b_1 + y_2 p_2' b_2 + \cdots + y_k p_k' b_k.$$
Cet élément x vérifie $\phi(x) = (y_1, \ldots, y_k)$ en utilisant (1) et le fait que $p_i' = 0 \pmod{p_j^{a_j}}$ pour tous $i \neq j$.

Ainsi, ϕ est surjectif, ce qui conclut la démonstration.

Exercise 6. (1) Considérons le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Clairement, puisque $3x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ce groupe n'est pas 3-divisible. Cependant, comme $2 \cdot 1 = 2$ et $2 \cdot 2 = 1$, on voit qu'il est 2-divisible.

(2) Nous donnons deux exemples :
- Le produit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est clairement infini, 2-divisible, mais pas 3-divisible.
- Considérons le groupe (additif) $\mathbb{Z}_2 := \{\frac{a}{2^i} | a, i \in \mathbb{Z}, 2 \nmid a\} \bigcap \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$. Premièrement, prouvons que c'est bien un (sous)groupe (de $\mathbb{Q}$). Par définition, il contient clairement l'élément neutre et tous les inverses de ses éléments. Vérifions qu'il est stable par addition : pour $i < j$:
$$\frac{a}{2^i} + \frac{b}{2^j} = \frac{a2^{j-i} + b}{2_j} \in \mathbb{Z}_2$$
car $a2^{j-i} + b$ est impair. Si $i = j$ et $a = -b$, alors
$$\frac{a}{2^i} + \frac{b}{2^j} = 0 \in \mathbb{Z}_2$$
Si $i = j$ et $a \neq -b$, écrivons $a + b = c2^k$ avec $2 \nmid c$ et $k \geq 1$. On a alors
$$\frac{a}{2^i} + \frac{b}{2^j} = \frac{a+b}{2^j} = \frac{c}{2^{i-k}} \in \mathbb{Z}_2$$
donc ce dernier est bien un groupe.
Observons que $\mathbb{Z}_2$ n'est pas 3-divisible car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}_2$ et donc il n'y a pas d'élément $x \in \mathbb{Z}_2$ tel que $3x = 1 \in \mathbb{Z}_2$. La 2-divisibilité est évidente.

(3) $(\mathbb{Q}, +)$ est un tel exemple.

(4) Nous donnons deux preuves :
- Soit $n = |G|$ le cardinal de G et soit $g \in G$. Puisque g est n-divisible, il existe $g_0 \in G$ tel que $g = ng_0$. Mais pour tout élément, on a $ng_0 = 0$ (puisque l'ordre $o(g_0)$ divise n, $ng_0 = ko(g_0)g_0 = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$).
- Supposons par contradiction que G est fini, divisible, non-trivial et soit $0 \neq g \in G$. Notons $n := |G| = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ avec $p_1, \dots, p_m$ des nombres premiers distincts et tous $n_i \geq 1$. En appliquant inductivement la p_i-divisibilité, il existe g_1 tel que $p_1^{n_1} g_1 = g$ et g_i pour $i = 2, \dots, m$ tel que $p_i^{n_i} g_i = g_{i-1}$. En particulier, on a $0 = ng_m = g \neq 0$, ce qui est absurde.

Exercise 7. Nous devons trouver des groupes abéliens de type fini G à isomorphisme près qui s'insèrent dans la suite exacte
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to 0.$$
Nous affirmons que de tels G sont donnés à isomorphisme près par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ pour $d \mid 12$. Comme G est de type fini, il est isomorphe à $F \times T$ où F est un groupe libre isomorphe à $\mathbb{Z}^l$ pour un certain $l \geq 0$ et T est un groupe de torsion.

Notez que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} i \cong \mathbb{Z}$ et n'a donc pas de torsion. Ainsi, nous obtenons que $f_{|T}$ est injectif. Par conséquent, T est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Donc
$$T \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

où $d \mid 12$.

Si nous restreignons la suite exacte à $F \times \{0\}$, nous obtenons que F surjecte sur un groupe abélien fini et a un noyau isomorphe à $\mathbb{Z}$. Nous laissons le lecteur se convaincre que cela implique que le rang du groupe abélien libre F est 1. Ainsi, nous obtenons que $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ pour un certain $d \mid 12$.

Il reste à montrer que pour chaque $d \mid 12$ il existe une suite exacte de la forme

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to 0.$$

Pour cela, soit $d' = \frac{12}{d}$ et soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $(a, \overline{b}) \mapsto a + d'b + 12\mathbb{Z}$. Notez que f est une surjection et que son noyau n'a pas d'éléments de torsion non triviaux. Comme $\operatorname{Ker} f$ n'a pas de torsion et $\operatorname{Ker} f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, il découle du théorème de classification des groupes abéliens de type fini que $\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{Z}$. Ainsi, nous obtenons une suite exacte comme ci-dessus.

Exercise 8. (1) Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$. Par le théorème de Lagrange, l'ordre de x divise l'ordre de G, donc l'ordre de x est p^k pour un certain $1 \leq k \leq n$. On peut alors vérifier que $x^{p^{k-1}}$ est un élément d'ordre p.

(2) Procédons par récurrence sur k. Pour $k = 0$, $\{e\}$ est un sous-groupe normal d'ordre $p^0 = 1$ de G. Si $k = n$, G lui-même est un sous-groupe normal d'ordre p^n. Supposons que $0 < k < n$ et qu'il existe un sous-groupe normal N de G d'ordre p^{k-1}. Alors G/N est un p-groupe non trivial. Par l'exercice 2 de la feuille 4 (la même démonstration fonctionne) et Lagrange, $\mathrm{Z}(G/N) \neq 0$ et contient donc un élément xN d'ordre p. Considérons l'homomorphisme quotient $\pi : G \to G/N$ et prouvons que $\pi^{-1}(\langle xN \rangle)$ est un sous-groupe normal d'ordre p^k de G. Ces faits découlent des observations suivantes : comme $\langle xN \rangle < \mathrm{Z}(G/N)$, $\langle xN \rangle$ est un sous-groupe normal de G/N et donc l'image réciproque par π est un sous-groupe normal de G. De plus, par le premier théorème d'isomorphisme, nous trouvons que $|\pi^{-1}(\langle xN \rangle)| = |\langle xN \rangle| \cdot |\mathrm{Ker}(\pi)| = p^k$.

(3) Nous construisons la chaîne souhaitée par récurrence, où $G_k < G_{k-1}$ est normal pour tout $1 \leq k \leq n$ et $|G_k| = p^{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Soit $G_0 = G$ et $k > 0$. Par récurrence, nous avons G_{k-1} d'ordre p^{n-k+1}. Par (ii), il existe un sous-groupe normal $G_k < G_{k-1}$ d'ordre p^{n-k}. De plus, pour tout k, l'ordre de G_k/G_{k-1} est égal à p, donc tous les quotients sont cycliques, donc abéliens.